Kapitel 1

Kombinatorische Optimierung

1.1 Generierung saisonaler Charterflugpläne

Durch die Globalisierung der Märkte und Internationalisierung von Unternehmen wird der effiziente Einsatz personeller und materieller Ressourcen zu einem wesentlichen Faktor für die Konkurrenzfähigkeit von Transport- und Logistikunternehmen. Im Bereich von Linienfluggesellschaften wurden bereits in den letzten Jahren Optimierungsverfahren für zwei Teilproblemstellungen in diesem Bereich am ZAIK entwickelt: sowohl ein Branch and Price Ansatz für das Fleet–Assignment–Problem als auch ein auf diesem Ansatz basierendes Lösungsverfahren für das Crew–Scheduling–Problem.

Die entsprechenden Planungsprobleme unterscheiden sich bei Charterfluggesellschaften in einigen zentralen Punkten. Insbesondere dem Problem der starken Saisonabhängigkeit und dem damit stärkeren Einfluss des Passagieraufkommens auf die Flugplangestaltung muss besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Mit einem Partner aus dem Charterflugbereich haben wir uns der Lösung dieses Problems zugewandt.

1.1.1 Problemstellung

Eingabe für dieses Optimierungsproblem sind saison- und wochentagabhängige prognostizierte Nachfragen für alle angebotenen Flugstrecken. Diese bestehen aus den durch die enge Kopplung der Charterfluggesellschaft mit den Reiseveranstaltern garantierten Passagiernachfragen und den Daten der vergangenen Jahre. Ausserdem sind für alle Flugstrecken und Flugzeugtypen Kostensätze sowie entsprechende Erträge beförderter Passagiere gegeben.

Das Problem besteht nun darin, die zur Verfügung stehenden Flugzeuge der Charterfluggesellschaft so einzuplanen, dass ein unter Profitabilitätsgesichtspunkten optimaler Flugplan entsteht. Der Gewinn eines Flugplanes errechnet sich dabei sowohl aus den Fix- und Betriebskosten der Flugzeuge (wobei nicht eingesetzte Flugzeuge an andere Fluggesellschaften vermietet oder Flugzeuge angemietet werden können) als auch aus den oben erwähnten passagierabhängigen Kosten und Erträgen.

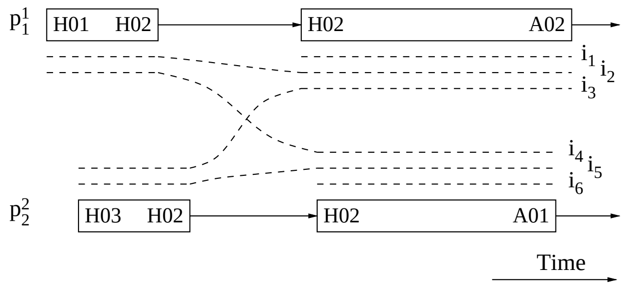

Abbildung 1.1: *Verknüpfung der Rotationen mit Reiserouten*

Weiter müssen operationelle Nebenbedingungen wie Flughafenöffnungszeiten, Mindestbodenzeiten (zum Auftanken und Catering) und Flugverbote auf bestimmten Flugstrecken beachtet werden.

1.1.2 Mathematische Modellierung und Lösungsansatz

Wir verwenden zur Lösung eine Set–Partitioning–Formulierung mit Nebenbedingungen, die als Lineares Programm modelliert wird: aus der Menge aller möglichen Tagesflugzeugrotationen (erzeugt durch ein Netzwerk, dessen Aufbau in Abbildung **??** verdeutlicht wird) muss eine Teilmenge ausgewählt werden, so dass, unter Beachtung von globalen Nebenbedingungen wie der Anzahl an verfügbaren Flugzeugen, möglichst viele Passagiere auf den gewünschten Flugstrecken befördert werden.

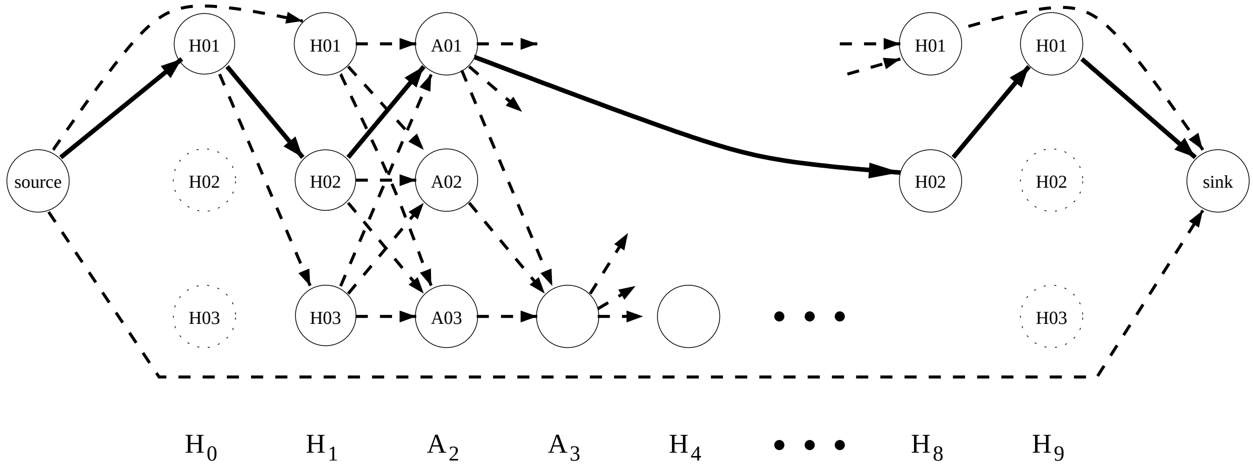

Abbildung 1.2: *Aufbau des Netzwerks zum Column Generation*

Da die Anzahl aller möglichen Flugzeugrotationen in einer handhabbaren Größenordnung liegt, können während des gesamten Lösungsprozesses auch bei größeren praxisbezogenen Datensätzen alle möglichen Tagesrotationen gleichzeitig beachtet werden (siehe unten).

Ein Problem stellt jedoch die Qualität der erzeugten Lösungen dar: Ohne zusätzliche Beschränkungen benötigt das Lösungsverfahren extrem lange, um akzeptable Lösungen zu erzeugen. Aus diesem Grunde werden sogenannte ,,Min–Cover"–Schnitte im Verlauf des Lösungsprozesses zum Linearen Programm hinzugefügt, damit die Wahl der möglichen Lösungen schnell eingeschränkt werden kann und so gute Lösungen in kurzer Zeit erzeugt werden können. In diesen Branch and Cut Ansatz konnten zusätzlich auch Heuristiken zum schnellen Auffinden zulässiger Lösungen integriert werden.

1.1.3 Ergebnisse

Uns stehen verschiedene Datensätze einer großen europäischen Charterfluggesellschaft zur Verfügung, die etwa 20 deutsche Flughäfen und 60 Zielflughäfen bei ca. 60 planbaren Flugzeugen enthalten. Die entsprechende Nachfrage an Flugverbindungen ist nach einzelnen Wochentagen aufgeschlüsselt, so dass in einer einfachen Version jeder Wochentag einzeln optimiert werden kann. Hieraus ergeben sich ungefähr 13.000 mögliche Tagesrotationen pro Wochentag, wenn nur direkte Flüge ohne Umsteigen oder Zwischenlandungen möglich sind. (Wie Abbildung **??** verdeutlicht, steigt die Komplexität des Problems an, wenn auch Umsteigen oder Zwischenlandungen erlaubt sind.) Für die Optimierung über die ganze Woche ergeben sich knapp 60.000 mögliche Tagesrotationen, unter denen die beste Kombination für die gesamte Woche gesucht ist.

Bei der Generierung von Flugplänen für einzelne Wochentage erhalten wir Laufzeiten, die auf einem handelsüblichen PC im Bereich von Minuten liegen. Die so erzeugten Lösungen liegen meist höchstens 0,2% vom Optimalwert entfernt. Wird ein Wochenflugplan angestrebt und gleichzeitig die Möglichkeit eröffnet, dass Passagiere einmal das Flugzeug wechseln können, sowie pro Flugzeug eine Zwischenlandung pro Passagierreiseroute eingeplant werden darf, so vergrößert sich die Laufzeit: Sie beträgt dann für eine Lösung, die höchstens 3–4% vom Optimalwert entfernt ist, wenige Stunden.

1.1.4 Aktuelle Forschung

Zur Zeit wird dieser Lösungsansatz in zwei Richtungen weiterentwickelt: An großen Flughäfen wird die hohe Nachfrage nach Starts und Landungen durch die Vergabe von sogenannten ,,Slots" geregelt. Fluggesellschaften besitzen solche Zeitfenster für ihre Flugbewegungen an den entsprechenden Flughäfen; zu anderen Zeitpunkten sind keine Flugbewegungen an dem Flughafen planbar. Da Charterfluggesellschaften meist kleine (regionale) Flughäfen anfliegen, existieren nur auf wenigen Flughäfen Slots. Es werden zur Zeit verschiedene Möglichkeiten zur Berücksichtigung solcher Slots in unserem Branch and Cut Rahmen erprobt.

Die zweite Forschungsrichtung befasst sich mit der Integration von Wartungsereignissen in den zu erstellenden

Flugplan. Unter einem Wartungsereignis wird der Zeitraum verstanden, den die regelmäßige Wartung eines bestimmten Flugzeugtyps in Anspruch nimmt. Es ist nun dafür zu sorgen, dass alle Flugzeuge eines entsprechenden Typs in vordefinierten Abständen gewartet werden. Eine Modellierung und ein darauf basierender Lösungsansatz werden für dieses Problem zur Zeit am ZAIK entwickelt.

Kontakt: `airlines@zpr.uni-koeln.de`

1.2 Fahrereinsatzplanung im ÖPNV

Seit am 1. Januar 1996 eine EU–Richtlinie von Bund und Ländern in deutsches Recht umgesetzt wurde, müssen die Kommunen die Nahverkehrsleistungen bei den Verkehrsunternehmen einkaufen. In diesem Zusammenhang stellt, bei fortschreitender Privatisierung und zunehmendem Wettbewerb auf dem ÖPNV–Markt, der effiziente Ressourceneinsatz einen immer wichtigeren Faktor dar.

1.2.1 Problemstellung

Es sollen Arbeitspläne für Fahrer erstellt werden, so dass jedes Fahrzeug auf jeder Linie immer einen Fahrer hat. Bei einer vorgegebenen Anzahl an Fahrern sollen möglichst sozialverträgliche Dienstpläne erzeugt werden. Dies kann sich beispielsweise in einer ausgewogenen Dienstlänge oder einer angenehmen Pausenlänge ausdrücken.

Als Eingabe dient ein Fahrzeugumlaufplan. Aus ihm geht hervor, welches Fahrzeug sich zu welchem Zeitpunkt an welcher Haltestelle befindet. Jedes beliebige Teilstück dieses Fahrzeugumlaufplans muss genau einem Fahrer zugeordnet werden.

Ausserdem müssen operationelle Nebenbedingungen beachtet werden. Diese bestehen auf der einen Seite aus vertraglichen und tarifrechtlichen Bedingungen (wie beispielsweise Pausenzeitregelungen und maximale Dienstlängen). Auf der anderen Seite müssen auch betriebliche Vorgaben, wie das Verhältnis von Teilzeit- zu Vollzeitarbeit, eingehalten werden.

1.2.2 Mathematische Modellierung und Lösungsansatz

Als Modell für dieses Problem kommt ein Lineares Programm als Set–Partitioning–Formulierung mit Nebenbedingungen zum Einsatz. Hierbei wird aus der Menge aller möglichen Dienste für die Fahrer die Kombination gewählt, die zum einen alle Dienstelemente überdeckt und zum anderen alle Nebenbedingungen einhält, wobei möglichst geringe Kosten verursacht werden.

Problematisch hierbei ist jedoch die schon bei einer geringen Anzahl an Dienstelementen sehr große Anzahl an möglichen Diensten. Daher wird zur Lösung ein Branch and Price Ansatz verwendet, wobei als Subproblem zur Erzeugung der benötigten Dienste ein Kürzeste–Wege–Problem gelöst wird. Einige Heuristiken zur Beschleunigung dieser Suche wurden bereits erprobt und erfolgreich implementiert. Allein durch den Einsatz alternativer Labeleliminationsverfahren konnte ein Geschwindigkeitszuwachs von bis zu 30% erzielt werden.

1.2.3 Ergebnisse

Wir hatten die Möglichkeit, das Lösungsverfahren mit Real–World–Daten eines norddeutschen Verkehrsbetriebes zu testen. Hier zeigte sich, dass die erzielten Ergebnisse von sehr guter Qualität sind und in Laufzeiten von etwa einer Stunde (auf einem handelsüblichen PC) produziert wurden. Bei einem Datensatz mit rund 760 Dienstelementen an sieben Ablösepunkten mit zwei möglichen Geschäftsstellen als Anfangspunkte der Dienste konnte bereits nach gut 40 Minuten eine Lösung produziert werden, die nachweisbar maximal 1,1% von der besten möglichen Lösung entfernt ist.

Die hier aufgezeigten Punkte prädestinieren das Verfahren für den planerischen Einsatz in der Praxis.

Kontakt: `combopt@zpr.uni-koeln.de`

1.3 Tourenplanung

Die Tourenoptimierung wird als eine der größten Erfolgsgeschichten des Operations Research bezeichnet (*G. Laporte*). Das starke Interesse an diesem Gebiet in Industrie und Forschung liegt zum einen am wirtschaftlichen Potenzial der Tourenoptimierung, zum anderen macht ihr Reichtum an Struktur sie zu einem faszinierendem Forschungsgebiet. Auch in den Jahren 1999/2000 konnte die Optimierungsgruppe am ZAIK wieder einige Facetten von Tourenplanungsproblemen bearbeiten.

Im Rahmen der Zusammenarbeit mit der Firma Profi.S wurden Praxisprojekte durchgeführt, die sich durch eine starke Vernetzung der Produktions- und Logistikplanung auszeichneten, während im eher theoretischen Bereich an der optimalen Lösung von Vehicle Routing Problemen gearbeitet wurde. Desweiteren haben wir Algorithmen für intermodale Transportprobleme entwickelt. Diese Arbeiten haben sowohl theoretische als auch praktische Früchte getragen.

1.3.1 Integration von Produktions- und Transportlogistik

Bei der Büromöbelfirma *dyes* bestehen aufgrund der *Just In Time*-Fertigung zahlreiche wechselseitige Abhängigkeiten zwischen Produktion und Distribution.

Den Kunden wird bereits bei der Bestellung ein Liefertermin kalenderwochengenau zugesagt. Bei der tagesgenauen Planung müssen dann sowohl die Bedürfnisse der Produktion nach ausgeglichener Auslastung der Maschinen berücksichtigt werden, als auch die der ausliefernden Spedition (SML Logistik- und Distributionssysteme), da nach ganz Deutschland und auch ins benachbarte Ausland geliefert wird. Hier galt es einen Algorithmus zu finden, der allen Anforderungen gleichzeitig gerecht wird.

Wir haben hierfür einen Ansatz entwickelt, der zunächst eine Tourenplanung durchführt und später die Produktion mit Hilfe eines linearen Programms so auf die Wochtage verteilt, dass eine möglichst gleichmäßige Auslastung der diversen Produktionslinien erreicht wird.

1.3.2 Branch-and-Cut für das Vehicle Routing Problem (VRP)

Routingprobleme sind aus kombinatorischer Sicht „schwere“ Probleme. Das heißt, dass wir nicht hoffen können, einen Algorithmus zu finden, der solche Probleme in jedem Fall in annehmbarer Zeit löst. Dies hat zur Entwicklung einer Vielzahl von Heuristiken geführt, also von Algorithmen, die auf den jeweiligen Anwendungsfall abgestimmt sind und hier eine vernünftige (wenn auch mathematisch zumindest nicht beweisbar optimale) Lösung liefern. Dennoch ist die Optimierung von Vehicle Routing Problemen immer eine faszinierende Forschungsaufgabe geblieben. Um die Schwierigkeiten zu verstehen, die das VRP beinhaltet, sollte man sich vor Augen führen, dass heute Instanzen des Traveling Salesman Problem mit mehreren tausend Knoten mit Branch-and-Cut-Methoden gelöst werden können, während beim VRP schon Instanzen mit über 70 Knoten eine große Herausforderung darstellen.

Am ZAIK wurde zu diesem Thema von Ulrich Blasum eine Dissertation angefertigt. Zur Lösung von VRP-Instanzen mittels Branch-and-Cut ist das Aufinden von geeigneten, verletzten Ungleichungen von zentraler Bedeutung. Im Rahmen der Dissertation wurden bisher bekannte Ungleichungstypen weiterentwickelt und neue gefunden. Ausserdem wurden Heuristiken und neue exakte Methoden zur Identifikation verletzter Ungleichungen entwickelt.

Dadurch gelang es erstmals zwei klassische Benchmarkinstanzen mit 76 Knoten auf einem einzelnen Prozessor zu lösen. Der im Rahmen der Arbeit entwickelte Code ist sehr effizient und findet die Lösungen innerhalb weniger Stunden, bisher verwendete Methoden benötigten mehrere Tage auf Parallelcomputern.

1.3.3 Transportprobleme mit Umladen

Das wachsende ökologische Bewusstsein, ebenso wie die Überlastung der Verkehrsinfrastruktur, haben das Interesse an intermodalen Strategien im Gütertransport beständig steigen lassen. So werden zur Entlastung der Infrastruktur und der Umwelt oft intermodale Logistikketten vorgeschlagen. Ein ähnliches Anliegen haben Speditionen, die ihre Transportaufträge (zumindest teilweise) über ein *Konsolidierungszentrum* abwickeln.

Im Bereich der strategischen Planung beschäftigt sich das *Operations Research* schon seit längerer Zeit mit solchen Problemen, hierbei werden jedoch vor allem Fragen der Platzierung von Konsolidierungszentren behandelt und das Transportaufkommen nur abgeschätzt. Die taktische und operationelle Planung der Transportketten stellt jedoch sehr viel höhere Anforderungen, da hier die aktuelle Auftragslage genau dargestellt werden muss. Daher wächst die Nachfrage nach Algorithmen, die solche Problemstellungen bearbeiten können.

Im kommerziellen Bereich werden Planungstools für die rechnergestützte Optimierung solcher Aufgaben jedoch noch kaum angeboten, da der Wechsel des Transportmediums eine wesentliche Erschwerung des Problems bedeutet. Wir haben solche Aufgabenstellungen aus verschiedenen Blickwinkeln untersucht und Algorithmen zu ihrer Lösung entwickelt.

Durch komplexitätstheoretische Untersuchungen können wir zeigen, dass schon stark relaxierte Probleme dieser Art schwer sind. Allerdings lassen sich für einfache Umladestrategien die Synergieeffekte durch den Güterumschlag abschätzen, was algorithmisch ausgenutzt werden kann (s. Abschnitt **??**) Diese Ergebniss flossen in einen lokalen Suchalgorithmus ein, der schon in seiner einfachsten Form für Probleme mittlerer Größe gute Ergebnisse bringt. Da sich lokale Suchheuristiken leicht modifizieren lassen, eignet er sich auch hervorragend für die Anwendung in vielen praktischen Problemen. Deweiteren wurde im Rahmen einer Diplomarbeit ein *Column Generation*-Algorithmus für ein Anwendungsproblem aus der Automobilindustrie entwickelt.

Kontakt: `combopt@zpr.uni-koeln.de`

1.4 Steinerprobleme

Umladeprobleme spielen eine wachsende Rolle in der modernen Transportlogistik. Dabei wird bei einem Pickup-and-Delivery-Problem erlaubt, Güter kurzzeitig in einem sogenannten Konsolidierungszentrum zwischenzulagern und dann mit einem anderen Fahrzeug weiterzutransportieren. Dieser zusätzliche Freiheitsgrad erschwert jedoch die Modellierung erheblich.

Um ein tieferes Verständnis für die Eigenschaften solcher Probleme zu erhalten, haben wir zwei kombinatorische Optimierungsprobleme entwickelt. Diese sind zwar zu stark idealisiert, um direkt für die Anwendung nutzbar zu sein, wir denken jedoch, dass sie wichtige strukurelle Eigenschaften der Probleme abbilden. Zudem konnten wir die algorithmische Lösung eines der Probleme erfolgreich in einer Heuristik für die Anwendung einsetzen (s. Abschnitt **??**).

Beim sogenannten k-*Star-Hub-Problem* gehen wir davon aus, dass jeder Auftrag einzeln direkt ausgeliefert wird oder alle Aufträge eines Kunden zu einem von k Konsolidierungszentren gebracht werden können. Dieses Problem lässt sich für nur ein Konsolidierungszentrum als bipartites Vertex Cover Problem modellieren, für $k = 2$ kann es mit Netzwerkflussmethoden ebenfalls effizient gelöst werden. Bei mehr als zwei Zentren ist es jedoch $\mathcal{NP}$-vollständig.

Die zweite Art von Problemen haben wir *Steiner-Diagram-Problem* genannt. Das Problem kann auch als Umladeproblem interpretiert werden, bei dem jeder Auftrag auf seinem Weg beliebig oft umgeladen werden darf. Es ist verwandt mit dem generalisierten gerichteten Steinernetzwerk-Problem und dem minimalen äquivalenten Netzwerk-Problem. Bei dem behandelten Problem kommt zusätzlich die Forderung nach Kreisfreiheit hinzu, welche es uns zu zeigen erlaubt, dass sich das Problem in polynomieller Zeit lösen lässt, falls die Anzahl der Aufträge beschränkt, das zugrundeliegende Netzwerk transitiv abgeschlossen und die Dreiecksungleichung erfüllt ist. Die beiden letzten Bedingungen werden in einem Anwendungsproblem immer erfüllt sein.

Kontakt: `combopt@zpr.uni-koeln.de`

1.5 Ein Färbungsproblem aus der Automobilproduktion

Bei der Bestellung eines neuen Automobils haben Kunden die Wahl zwischen einer Vielzahl von Ausstattungsmerkmalen (Sonnendach, 3 oder 5 Türen, etc.) und Farben. Die europäische Automobilindustrie trägt dem Rechnung, indem verschiedene Modelle nicht – wie z. B. in den Vereinigten Staaten üblich – auf Vorrat, sondern der Nachfrage entsprechend produziert werden. Dies erfordert eine sorgfältige Planung der Produktion; insbesondere hat die Reihenfolge, in der eingehende Bestellungen bearbeitet werden, erheblichen Einfluss auf Qualität und Kosten.

Wir beschäftigen uns mit einem Teilproblem des Produktionsprozesses, das in der Lackierstraße (dem *paint shop*) auftritt, in der täglich eine Sequenz von verschiedenen Karosserietypen in den nachgefragten Farben lackiert wird. Bei jedem Farbwechsel müssen die Farbdüsen der Sprühpistolen gereinigt werden. Dies erhöht einerseits die Produktionskosten, andererseits belasten die überschüssigen Farbreste das Abwasser. Eine Minimierung der Farbwechsel ist also wünschenswert.

Bislang werden dazu heuristische Verfahren eingesetzt. Dabei werden zumeist Farbsortierspeicher benutzt, mit denen die vorgegebene Sequenz von Karosserietypen kurzzeitig abgeändert und anschließend wieder hergestellt werden kann.

Wir konnten durch eine geeignete Abstraktion neue theoretische Aussagen über die einfachste Form des Problems gewinnen, bei der die Reihenfolge der Karosserietypen unverändert gelassen wird und nur durch die Änderung der Farbreihenfolge die Anzahl der Farbwechsel minimiert werden soll. Es zeigte sich, dass bereits dieses Problem sowohl für nur zwei verschiedene Karosserietypen und eine beliebige Anzahl von Farben als auch für nur zwei Farben und eine beliebige Anzahl von Karosserietypen $\mathcal{NP}$-vollständig ist. Für den Fall, dass sowohl die Anzahl der verschiedenen Karosserietypen als auch die Anzahl der Farben beschränkt ist, konnten wir ein dynamisches Programm angeben, das das Problem in polynomieller Zeit löst.

Kontakt: `combopt@zpr.uni-koeln.de`

1.6 Testmengen in der ganzzahligen Optimierung

Die Kenntnis von Testmengen ermöglicht es, ganzzahlige Optimierungsprobleme mittels eines primalen Optimierungsalgorithmus zu lösen. Testmengen sind durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Eine zulässige Lösung x eines ganzzahligen Optimierungsproblems ist entweder optimal, oder es gibt ein Element t der Testmenge, so daß die Differenz $x - t$ wieder zulässig ist und bezüglich der Zielfunktion einen besseren Wert liefert. Ist also eine zulässige Lösung gegeben, kann man iterativ durch Subtraktion von Testmengenelementen zur Optimallösung gelangen.

Conti und Traverso haben einen interessanten Zusammenhang zwischen ganzzahliger Optimierung und Gröbnerbasen in der kommutativen Algebra aufgezeigt. Dabei werden zulässige Lösungen einer bestimmten ganzen Familie von ganzzahligen Programmen in Beziehung zu einem Binomideal in einem Polynomring gesetzt. Bei geeigneter Wahl einer Monomordnung entspricht dann die reduzierte Gröbner-Basis dieses Ideals der minimalen Testmenge für die Problemfamilie. Theoretisch ergibt sich dadurch die Möglichkeit, mit Hilfe algebraischer Methoden ganzzahlige Optimierungsprobleme zu ösen: Erst wird mit dem Buchberger-Algorithmus die Testmenge ermittelt. Anschließend wird ausgehend von einer zulässigen Lösung eine Folge von Verbesserungsschritten „entlang“ Elementen der Testmenge ausgeführt, bis das Optimum erreicht ist.

Obwohl in dem betrachteten Fall die Gröbnerbasis nur zu Idealen mit recht spezieller Struktur berechnet werden muß, ist dieser Ansatz aufgrund der hohen Laufzeit des Buchberger Algorithmus und der potentiell gewaltigen Größe der Basis für Beispiele mit vielen Variablen sehr problematisch. Daher werden die algebraischen Methoden nicht als direkte Lösungsverfahren betrachtet. Statt dessen werden die Methoden der Computeralgebra im hier verfolgten Ansatz dazu eingesetzt, die minimalen Testmengen zu ganzzahligen Optimierungsproblemen zu berechnen, um anschließend aus den so gewonnenen Informationen Aussagen über die Struktur der Testmengen zu ermöglichen.

So ist es beispielsweise im Falle der Bestimmung einer Knotenüberdeckung minimalen Gewichts in einem Graphen gelungen, die Struktur der Testmenge vollständig zu beschreiben, und zwar unabhängig von der Tatsache, daß zu ihrer Berechnung aufwendige algebraische Methoden eingesetzt wurden.

Weiterhin wurde ein Vertex-Cover-Problem auf vollständigen Graphen betrachtet. Bei geeigneter Wahl der Monomordnung gilt in diesem Spezialfall der

Satz: Bis auf ein Element ist die reduzierte Gröbnerbasis genau die Menge aller Vektoren, die entweder negativ

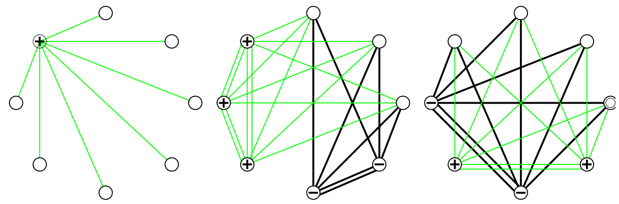

Abbildung 1.3: *Typische Repräsentanten der minimalen Testmenge für den K_8 graphisch dargestellt. Das linke Element und Elemente vom mittleren Typ senken das Gewicht einer Knotenüberdeckung, während die Elemente vom rechten Typ lediglich für eine Umverteilung der Gewichte stehen.*

bzgl. der Monomordnung sind und das Gewicht um 1 erniedrigen, oder das Gewicht unverändert lassen und positiv bzgl. der Ordnung sind.

Im Falle beliebiger Graphen kommt noch eine dritte Klasse von Elementen zur Testmenge hinzu, die die komplizierteren Adjazenz-Beziehungen zwischen Knoten mit veränderten Gewichten widerspiegelt.

Ziel ist es, bei schweren ganzzahligen Optimierungsproblemen eine – möglicherweise unvollständige – Beschreibung der Struktur der Testmenge anzugeben, deren Kenntnis dann in einer Verbesserungsheuristik genutzt werden kann.

Kontakt: `combopt@zpr.uni-koeln.de`